124 - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

E un k-ev de DF, u un endomorphisme de E, A sa matrice dans une base quelconque. On veut trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est plus « simple » (beaucoup de zéros).
En fait, GLn(K) agit sur Mn(K) par conjugaison, et détermine ainsi des classes de conjugaison. Pour une matrice donnée dans Mn(K), on cherche un représentant « simple » de sa classe de conjugaison (diagonale, triangulaire…).
Pour trouver ce représentant, il faut décomposer E en somme directe de sous espaces stables par u. Les polynômes en u vont donner de tels sous espaces. En effet : (faire un dessin de matrice diagonale par blocs).

Dans cette leçon, il faut vraiment insister sur l'utilité des polynômes d'endomorphismes dans la réduction.

E un K-ev de DF n, K=R ou C. u un endomorphisme de E.
Prérequis : espace stable, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, lien entre matrices et endomorphismes, les espaces propres sont en somme directe.
Attention : on ne définira les choses que pour les endomorphismes ou les matrices mais pas les deux.

I) Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre K[u] et le polynôme minimal

Déf : algèbre des polynômes en u K[u], morphisme de K[X] dans K[u]. Le noyau est un idéal non trivial (car mph d'espace de dim infinie vers espace de dim finie), c'est l'idéal des polynômes annulateurs. Le générateur de cet idéal est appelé polynôme minimal [Cog 271] [BMP 161]

Rq : en dim infinie, le mph peut être injectif, on ne peut pas définir le polynôme minimal comme ceci [Cog 272]

Rq : un polynôme en u est nul ssi il est divisible par le polynôme minimal. Tous les polynômes en u ne sont donc pas nuls (remarque récurrente du jury).

Prop : la dimension de K[u] est égale au degré d du polynôme minimal *(en effet, par division euclidienne par le polynôme minimal, on voit que K[u]=Ann(u)+K_{d-1}[u]. La somme est bien sûr directe. Si Phi est le morphisme de K[X] dans K[u], la restriction de Phi de K_{d-1}[u] à K[u] est un isomorphisme, donc la dim de K[u] est la dim de K_{d-1}[u], càd d)*
De plus, l'image de la base (1,X,…,X^{d-1}) est une base de K[u] : {Id, u, u^2,…,u^{d-1}} [Cog 272]

Prop : Ker(P(u)) est stable par u [Cog 278]

Prop : F sev stable (u(F) inclus dans F). Alors le polynôme minimal de la restriction de u sur F divise le polynôme minimal de u [Cog 278]

Lemme : lemme des noyaux + les projecteurs sur un noyau par rapport aux autres est un polynôme en u [Gou 175 + Gou 194]

2) Deux premières applications

Appl : calculer une puissance de matrice. Si P est un polynôme annulateur de A, alors A^k est R_k(A) où R_k est le reste de la DE de X^k par P *(on a intérêt à avoir P minimal)*

Une appl : calculer une exp de matrice sur un exemple. *Si une matrice vérifie (A-Id)(A-2Id)=0, on note p la proj sur Ker(A-Id) parallèlement à Ker(A-2Id) et q=Id-p. Alors exp(A)=exp(A)p+exp(A)q. Or exp(A)p=exp(2Id)exp(A-2Id)p=exp(2)*sum((A-2Id)^n/n!)p=exp(2)p car (A-2Id)op=0. Exp(A)q=exp(1)exp(A-Id)q=e(Id+A-Id)q=eAq. Par Bézout, 1=a(X)(X-1)+b(x)(X-2), on peut calculer a et b. En combinant Bézout avec p+q=1, on trouve p et q, et donc exp(A).* [Mn 23]
On reviendra sur ces calculs plus tard.

3) Polynôme caractéristique et Cayley Hamilton

Th : Cayley Hamilton [Gou 177] *(on se donne x non nul, on regarde {x,f(x),…,f^p(x)} où p est le petit entier tq la famille soit liée (on écrit la relation de liaison). On complète {x,f(x),…,f^{p-1}(x)} en une base de E, la matrice de f est par blocs avec un nul. On calcule le poly caract, il s'annule)*

Csq : E somme directe des SEC

Csq : les racines du polynôme minimal sont aussi racines du polynôme caract. Ainsi, les polynômes minimaux et caract ont même facteurs irréductibles *(pas si facile à montrer ! Ne pas scinder sur C ! On écrit que P est égal au produit des Q_i^n_i, puis E comme somme des SEC E_i, on dit que mu est le ppcm des mu_i des restrictions f_i sur chaque E_i. Q_i^n_i est alors un polynôme annulateur de f_i donc mu_i divise Q_i^n_i. Or Q_i est irred donc mu_i=Q_i^m_i. Du coup mu est égal au produit des Q_i^m_i, et ce sont bien les mêmes facteurs irred [Internet]*
Sinon on mq mu et P ont mêmes racines complexes. Sur C c'est clair que c'est les mêms facteurs irred. Sur R on prend Q irred qui divise les deux. Si le degré de Q est 1 alors c'est bon. Sinon, P = (X-a)(X-bar(a)), donc a et bar(a) sont vp donc divisent les deux [Mon 91 4e edition]
Sinon, [Cog 288])

II) Diagonalisation et trigonalisation

1) Diagonalisation

Cas le plus favorable de réduction

Déf : u diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Dans cette base, la matrice de u est alors diagonale, et E est somme directe des sous espaces propres.

CNS : diago ssi il existe un polynôme annulateur simplement scindé ssi le polynôme minimal est simplement scindé ssi le polynôme caract est scindé et la dimension des sous espaces propres est égale à la multiplicité des racines dans le poly caract. [BMP 165] D'où l'importance du corps où on diagonalise. Ex : matrice [0,1,-1,0]

Ex : projecteurs toujours diagonalisables [BMP 165]

Ex : plus généralement, tout élément d'ordre fini de GLn(C) est diago (car X^r-1 l'annule) [Cog 304]

Csq : u est diagonalisable ssi K[u] ne contient aucun nilpotent non nul. *(se fait à la main si on se souvient qu'être nul dans K[u], c'est être divisible par mu)*

Prop : u diagonalisable ssi k[u] est isomorphe en tant qu'algèbre à k^l [BMP 229 ex 4.23] *(théorème chinois, idéaux maximaux)*

Application : calculer les puissances de matrices, ce qui sert si par exemple on a une relation de récurrence U_n=A*U_{n+1}, et U_0=…
Voir http://membres.multimania.fr/ouichoulamya/mp/exos/ExosReduction.pdf p.8

Application : résolution d'équation : A^3 – 2A² – A + 2I = 0

Appl : dans une equa diff Y'=AY, si A est diagonalisable, un sfs de solutions est {t->exp(lt)v}, l valeur propre, v vect propre.

2) Trigonalisation

Cas un peu moins favorable

Définition : si la matrice de u est semblable à une matrice triangulaire supérieure

CNS : u trigo ssi il existe un polynôme annulateur scindé ssi le poly minb est scindé ssi le poly caract est scindé. [BMP 166] *(récurrence)*

Rq : si K est alg clos, tout endomph est trigonalisable.

Appl : Cayley Hamilton [Gou 176] *(A une matrice, P le poly caract, L un corps de décomposition de P. A est trigo dans L)*

Appl : les matrices diagonalisables sont denses dans Mn(C) mais pas dans Mn(R) *(discriminant pour Mn(R)).* [Gou 185]

Appl : une 3^e démo de CH

Prop : A dans Mn(C) est diagonalisable ssi l'orbite de A est fermée *[Caldero] passe par Jordan, ou [Gou 191] qui montre que A est semblable à une matrice triangulaire avec des petits termes hors diagonale*

3) Réduction simultanée

Th : soit une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent. Alors il existe une base qui diagonalise tous les éléments de la famille [Gou 171] (c'est aussi vrai pour les trigo mais c'est plus dur. Traiter d'abord le cas où c'est que des homothéties, puis l'autre cas, récurrence)

Appl : une CL ou une composée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent entre eux est diagonalisable.

Appl : GLn est isomorphe à GLm ssi n=m [Cog 305] *(mq si G est un sg fini de GLn où tous les elts sont d'ordre 2, alors il a au plus 2^n éléments. Mq il existe un tel groupe. Conclure par RpA)*

4) Réduction des endomorphismes normaux [Gou 258]

On va réduire On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C). Sur un espace hermitien on va réussir à diagonaliser, mais pas sur un euclidien.

Def : [Gou 258]

- Endomorphismes autoadjoints <-> u=u*
- Endomorphismes normaux : u commute avec u* (en particulier, les autoadjoints sont normaux).
- On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C).
- Tous ces endomph sont normaux, seuls Sn(R) et Hn(C) sont autoadjoints.

Lemme : deux lemmes du Gourdon. Prop 2 inutile.

Th : réduction des endomph normaux sur un ev hermitien. C'est en fait une CNS.

Th : réduction des endomph normaux sur un ev euclidien. C'est en fait une CNS. *On ne se sert pas de la réduction sur C pour trouver celle sur R.*

Corollaire : réduction de On(R), An(R), An(C), Sn(R), Hn(C), Un(C) *(tableau)*

Corollaire de la réduction de U(n) et SO(n) : ils sont connexes par arc [Aud 66]
Pour SO(n) : il suffit de relier toute matrice à l'identité. Le nb de -1 est pair, on les regroupe deux par deux en les écrivant comme une matrice de rotation avec theta=Pi. Donc la matrice a que des blocs de rotations et des 1. On rempalce theta par t theta, et le chemin t->B(t) mène de Id à la matrice.*

Corollaire de la réduction de Sn(R) : (E,q) un espace euclidien, et q' une forme quadratique. Alors il existe une base orthonormée de E (ie orthonormée pour q) dans laquelle la matrice de q' est diagonale réelle (et cette base est donc orthogonale pour q') [Gou 245]

Appl : classification des coniques

III) Des réductions plus poussées

Cad soit des réductions dans des cas plus généraux (dans Frobenius, il n'y a aucune hypothèse), soit plus poussées (mêmes hypothèses dans Jordan que dans trigo, mais résultat plus fin)

1) Dunford [Gou 193]

Nécessite le polynôme caractéristique scindé !

Th : Dunford *Comme on sait que les projecteurs p_i sont des polynômes en f, on pose d=sum(lambda_i*p_i), et n=f-d.*

Appl : calcul de puissance (formule binôme) et d'exponentielle [Gou 196]
Pour calculer l'exp, on écrit que *d=sum(lambda_i*p_i) et n=sum((f-lambda_i*Id)*p_i)*
*On a alors exp(d)=sum(exp(lambda_i*p_i)) et on calcule aussi exp(n) en fonction des p_i. On finit par Dunford en disant que exp(f)=exp(d)exp(n), exprimé en fonction des p_i, qu'on peut calculer par DES et Bézout.*

Appl : expA est diagonalisable ssi A l'est [BMP 215] *(commencer par écrire la décomp de Dunford de exp(u) : exp(u)=exp(d)exp(n)=exp(d)(id+n'). Utilise le fait que l'exp d'un nilp est unipot)*

Appl : u un automorphisme complexe. Alors il existe un polynôme P tq u=exp(P(u)) [BMP 213] *(se sert de l'inversion sur les unipotents !! M dans GLn(C). Dunford : M=D+N, D a les même vp que M donc inversible. M=D(Id+D^-1N). Comme exp :C->C* est surj, pour chaque valeur propre lambda, il existe un mu tq exp(mu)=lambda. On définit Q le poly interpol de Lagrange qui passe des lambda_i aux mu_i. On a donc exp(Q(D))=D (calcul). Or D est un poly en M : D=P(M). Donc D=exp(QoP(M)). Etude de X=I+D^-1N : unipotente. X=exp(logX). Mq logX est un polynôme en M. Le poly caract de D a un coeff constant non nul car D inversible donc D^-1 est un poly en D, qui est lui-même un poly en M donc D^-1 est un poly en M. Dunford : N est un poly en M. Donc X aussi, donc logX aussi. logX=R(M). M=exp(QoP(M))exp(R(M))=exp(R+QoP(M)) gagné).*

Appl : A une matrice de GLn(R) qui admet une racine carrée. Il existe un polynôme P tq A=exp(P(A)) [BMP 215] *(Se sert du cas complexe !! Rq : c'est clair pour n=1. Une inclusion claire : A dans exp(Mn(R)), A=expB. Alors A inversible et exp(B/2)²=A. Autre inclusion : A dans GLn(R) tq A=B². B est dans GLn(C) donc il existe un poly Q tq B=exp(Q(B)). B=conj(B)=exp(conjQ(B)). Q(B) et conjQ(B) commutent donc A=Bconj(B)=exp((Q+conjQ)(B)) et Q+conj(Q) est un poly réel donc c'est bon)*

2) Jordan [Caldero] ou [Mneimné 44]

Dans tout ce qui suit on travaille dans Mn(C).

Th : A, B diagonalisables. A et B semblables ssi même poly caract.

On considère un endomorphisme nilpotent.

Prop : suite de noyaux emboîtés. Elle s'essouffle. On peut y associer un tableau de Young.

*La suite des noyaux croit en s'essoufflant. L'indice à partir duquel elle devient constante est la multiplicité dans le polynôme minimal. Par exemple, si Ker(A)=Ker(A²), 0 est racine simple dans le polynôme minimal. On en déduit que A est diagonalisable ssi Ker(A-lambda*Id)²= Ker(A-lambda*Id) pour tout lamba. Le nb de cases dans la première colonne du tableau est le degré du polynôme minimal (ie l'indice de nilpotence)*

Th : tout endomorphisme nilpotent admet une représentation en bloc de Jordan dans une bonne base. *On part d'un supplémentaire du dernier K_r différent de l'espace entier, et on en prend une base. Par récurrence, pour j qcq, on construit un supplémentaire de K_{j-1} dans K_j…Voir cours GC.*

Prop : deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même tableau de Young. En particulier, il y a unicité de la réduction de Jordan.

Csq : on peut dénombrer le nombre d'orbites dans le cône nilpotent, c'est le nombre de tableau de Young à n cases, càd le nb de partitions de n, noté p(n). [Nou 174] *p(n) est le coeff de t^n dans le produit infini des 1/(1-t^i)*

Maintenant, u est un endomorphisme quelconque.

Th : Jordan pour matrice quelconque

Th : polynôme caract + tableaux de Young = invariants totaux de similitude. Autrement dit, A et B sont semblables ssi A et B ont mêmes vp et si toute valeur propre l et tout entier positif k, dim(Ker(A-l*Id)^k)=dim(Ker(B-l*Id)^k) *(se servir de Dunford)*

Appl : M est semblable à sa transposée sur Mn(C) [Gou 201] *Il suffit de montrer qu'un bloc de Jordan est semblable à sa transposée. Pour ça, on réorganise les vecteurs de la base de Jordan et ça marche.*

D'après le th de Jordan, il y a une infinité de classes de similitudes sur Mn(C) car deux matrices au polynôme caract différent ne seront pas semblables, et il y a une infinité de pol caract possible. Par contre, pour un poly caract fixé, il y a un nb fini d'orbites.

Appl : dénombrement des classes de similitude de matrices pour un polynôme caractéristique donné. *(égal à p(k_1)*…*p(k_r) si les k_i sont les dim des SEC)*

Prop : matrices semblables sur C ssi semblables sur R [Gou 158] *(reste vrai pour toute extension L/K)*

Csq : les orbites sur R sont données par l'intersection des orbites sur C avec Mn(R).

Th : clôture des orbites (ordre de Chevalley)

3) Endomorphismes cycliques [Gou 289]

Qui serviront pour Frobenius

Def : E_x={P(u)(x), P}. P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal {P tq P(u)(x)=0}.

Prop : E_x est un ev de dimension le degré de P_x, et on a une base.

Prop : il existe x tq P_x = polynôme minimal

Def : u est cyclique s'il existe x tq E=E_x, ce qui équivaut à pol caract = pol min = P_x.

Prop : tout endomph cyclique est semblable à une matrice compagnon

4) Frobenius [Gou 290]

Théorème : invariants de similitude

Appl : L un surcorps de K. Si A,B dans Mn(K) sont semblables sur L, alors elles sont semblables sur K.

Appl : Com(u)=K[u] ssi u est cyclique [Gou 292] *(les invariants servent pour le sens direct)*

Commentaires :

- Pour la réduction des endomph normaux et autoadjoints, être conscient qu'on peut avoir une approche différente (faire d'abord Sn et Hn, puis les isométries et unitaires, puis normaux…)
- Attention, dans le Gourdon pour la réduction des normaux, il présuppose la réduction des autoadjoints, ce qu'on n'a pas fait dans cette approche, mais on peut contourner ça en montrant le résultat presque trivial qui dit qu'une matrice symétrique de taille 2 a une vp réelle.
- Je n'ai pas parlé d'équa diff
- Aller plus loin sur K[u] : Mneimné p. 24.
- Idée : le fait qu'il y ait un nb fini de vp nous permet de montrer que GLn est dense dans Mn

Développements :

1 - Réduction des endomorphismes normaux [Gou Alg 258] (**)
2 - Réduction de Jordan [???] (**)
3 - Endomorphismes semi-simples [Gou Alg 224] (**)
Image de l'exponentielle matricielle [BMP 213] (**)
Commutant (cas diagonalisable, CNS cyclique) [Gou] (**)

Biblio :
[Aud] Audin - Géométrie
[BMP] Objectif agreg
[Caldero]
[Cog] Cognet – Algèbre linéaire
[Gou] Gourdon algèbre
[Mn] Mneimné – Réduction des endomorphismes
[Nourdin]

Rapport du Jury :
Comme chaque année, les candidats ne prêtent pas attention au libellé du sujet. Cette leçon est clairement différente de la leçon 129. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre K[u], connaître sa dimension sans hésiter. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre K[u] et ne souhaite pas avoir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.
Après avoir élaboré et décrit des outils efficaces, le candidat doit pouvoir décrire les matrices vérifiant par exemple $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ ou $A^3 - 3A + 2I = 0$.
Cette leçon ne porte pas uniquement sur la réduction des endomorphismes. Par exemple, le calcul des puissances ou de l'exponentielle d'une matrice peut illustrer cette leçon (sans passer par la décomposition de Dunford). On pourra méditer sur l'exemple suivant en utilisant les projecteurs sur les espaces caractéristiques : $A^2 - 3A + 2I = 0 \Rightarrow \exp(A) = (e^2 - e)A + (2e - e^2)I = P(A)$.
On attend aussi pour les meilleurs quelques résultats concernant l'algèbre formée par les polynômes d'une matrice (dimension, commutant etc.).
Réduction d'un endomorphisme (2007) : Cette leçon ne peut se réduire à la diagonalisation. Dans la décomposition de Dunford $f = d + n$, le fait que d et n sont des polynômes en f doit être signalé. L'utilisation des polynômes d'endomorphisme est certainement utile dans cette leçon. On doit savoir que 0 est une racine simple du polynôme minimal si $\{0\}$ différent de $\ker(A) = \ker(A^2)$. On pourra s'interroger sur les classes de similitudes de matrices parmi les matrices ayant un polynôme caractéristique donné.